DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2013.01.004

第 26 卷第 1 期　　纺 织 高 校 基 础 科 学 学 报　　Vol. 26, No. 1
2013 年 3 月　　BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES　　March, 2013

文章编号:1006-8341(2013)01-0015-03

一个包含 Smarandache 函数 $S(n)$ 和 $Z_1(n)$ 的方程及其整数解

车　顺

(西北大学 数学系,陕西 西安 710127)

摘要:对任意正整数 n,著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为 $S(n)=\min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid m!\}$,而伪 *Smarandache* 函数 $Z_1(n)$ 定义为 $Z_1(n)=min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid 1^2+2^2+\cdots+m^2\}$. 研究方程 $Z_1(n)+1=S(n)$ 的可解性,并利用初等方法得到了该方程的所有正整数解,同时也给出了所有解的具体表示形式.

关键词:*Smarandache* 函数 $S(n)$;伪 *Smarandache* 函数 $Z_1(n)$;方程;正整数解;初等方法

中图分类号:O 156.4　　　　**文献标识码**:A

1　引言及结论

对任意正整数 n,著名的 *Smarandache* 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!$. 即就是:$S(n)=min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid m!\}$;而伪 *Smarandache* 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid 1+2+\cdots+m$. 或者 $Z(n)=min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid 1+2+\cdots+m\}$. 本文定义一个新的伪 *Smarandache* 函数 $Z_1(n)$:$Z_1(n)$ 为最小的正整数 m 使得 $n\mid 1^2+2^2+\cdots+m^2$. 或者 $Z_1(n)=min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid 1^2+2^2+\cdots+m^2\}$,关于函数 $S(n)$ 的性质以及包含该函数的方程,许多学者进行了研究,获得了不少重要的结论[1-7]. 文献[1]对 $S(n)$ 的值分布进行了研究,证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta(3/2)x^{3/2}}{3ln\,x}+O\left(\frac{x^{3/2}}{ln^2x}\right),$$

其中　$P(n)$ 为 n 的最大素因子,$\zeta(s)$ 表示 *Riemannzeta*- 函数.

文献[2]研究了方程 $S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=\sum_{i=1}^{k}S(m_i)$ 的可解性,利用解析数论中的三素数定理证明了对任意正整数 $k\geqslant 3$,该方程有无穷多组正整数解 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$.

文献[3]研究了函数 $Z(n)=min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid m(m+1)/2\}$ 对于方程 $Z(n)=S(n)$ 及 $Z(n)+1=S(n)$ 的可解性问题,给出了如下的结论:

对任意的正整数 $n>1$,函数方程 $Z(n)=S(n)$ 成立当且仅当 $n=pm$,其中 p 为奇素数,m 为 $(p+1)/2$ 的任意大于 1 的因数.

收稿日期:2012-11-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省教育厅科学计划项目(12JK871)
作者简介:车顺(1989-),男,陕西省礼泉县人,西北大学数学系硕士研究生. E-mail:c121741881s@163.com

对任意正整数 n，函数方程 $Z(n)+1=S(n)$ 成立当且仅当 $n=pm$，p 为奇素数，m 为 $(p-1)/2$ 的任意正因数.

关于函数 $Z_1(n)$ 的性质，至今知道的很少，甚至还不知道是否有人研究. 本文认为这个函数与 $Z(n)$ 应该有类似的性质，因此值得研究. 本文利用初等方法对方程 $S(n)=Z_1(n)+1$ 的可解性进行研究，并获得了该方程的所有正整数解，同时也给出了该方程所有解的确切表示形式，即就是证明了下面的：

定理1 对任意正整数 n，方程 $S(n)=Z_1(n)+1$ 成立当且仅当 $n=pl$，其中 $p\geqslant 5$ 为素数且 $2p-1$ 为合数，l 为 $(p-1)(2p-1)/6$ 且不是 $(p^2-1)/24$ 的任意正因数.

2 定理的证明

利用初等方法以及 *Smarandache* 函数 $S(n)$ 的有关性质给出定理1的直接证明. 文中所用初等数论知识可以在文献[8]中找到.

对任意正整数 n，假定它的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，于是由 *Smarandache* 函数的性质可得 $S(n)=max\{S(p_1^{\alpha_1}),S(p_2^{\alpha_2}),\cdots,S(p_k^{\alpha_k})\}$. 不妨设 $S(n)=S(p^\alpha)$，于是由 $S(n)$ 的简单性质可知 $S(n)=S(p^\alpha)\leqslant p\alpha$，令 $S(p^\alpha)=ph$，可知 $h\leqslant\alpha$，那么 $n=p^\alpha l$，$(l,p)=1$，$S(l)<S(p^\alpha)$，那么要使方程 $S(n)=Z_1(n)+1$ 成立，即 $ph=Z_1(n)+1$，必有 $Z_1(n)=ph-1$. 再从 $Z_1(n)$ 的定义出发可知 $n\mid(ph-1)ph(2ph-1)/6$，即 $p^\alpha l\mid(ph-1)ph(2ph-1)/6$，$p^{\alpha-1}l\mid(ph-1)h(2ph-1)/6$. 由 $(ph-1,p)=1$，$(2ph-1,p)=1$ 知若要上式成立则有 $p^{\alpha-1}\mid h$. 现在对 α 进行分类讨论：

(1) 当 $\alpha=1$ 时，$p^{\alpha-1}=p^0=1$，可得 $1\mid h$. 因为 $h\leqslant\alpha$，所以 $h=1$. 从而有 $n=pl$，$(p,l)=1$，$S(n)=S(pl)=S(p)$，$Z_1(n)=p-1$. 从 $Z_1(n)$ 定义出发有 $n\mid m(m+1)(2m+1)/6$. 这里令 $p\geqslant 5$ 即 $pl\mid m(m+1)(2m+1)/6$，那么 $p\mid m$，$p\mid m+1$ 或 $p\mid 2m+1$，因为 $Z_1(n)$ 为满足方程的最小的正整数 m. 所以 $p=m$ 或 $p=m+1$ 或 $p=2m+1$，当 $p=m$ 时，$n\mid p(p+1)(2p+1)/6$，即 $l\mid(p+1)(2p+1)/6$，方程 $Z_1(n)=p$ 与 $S(n)=Z_1(n)+1$ 矛盾，当 $p=m+1$ 时 $m=p-1$，$n\mid(p-1)p(2p-1)6$ 即 $l\mid(p-1)(2p-1)/6$，方程 $Z_1(n)=p-1$ 满足 $S(n)=Z_1(n)+1$，因为 $(p-1,p)=1$，$(2p-1,p)=1$，若 $2p-1$ 为素数，则 $S(n)=2p-1$ 与 $S(n)=p$ 矛盾，所以 $2p-1$ 为合数，当 $p=2m+1$ 时，$m=(p-1)/2$，$n\mid p(p^2-1)/24$，即 $l\mid(p^2-1)/24$，有 $Z_1(n)=(p-1)/2$. 因为 $S(n)=p$ 这时 $Z_1(n)+1=(p+1)/2$ 与 $S(n)=Z_1(n)+1$ 矛盾，从而得到满足条件的 $Z_1(n)+1=S(n)$ 解为 $2p-1$ 为合数，l 为 $(p-1)(2p-1)/6$ 且不是 $(p^2-1)/24$ 的任意正因数.

(2) 当 $\alpha\geqslant 2$ 时有 $p^{\alpha-1}\mid h$，即 $p^{\alpha-1}\leqslant h\leqslant\alpha$，有 $S(n)=Z_1(n)+1$，因为任意的素数 $p\geqslant 3$，$\alpha\geqslant 2$ 不等式均不成立，当 $p=2$，$\alpha=2$ 时 $S(n)=Z_1(n)+1$ 成立，带入方程 $S(n)=Z_1(n)+1$ 不成立，且 $p=2$，$\alpha>2$ 时不等式不成立，所以 n 只能分解为 $n=pl$，$(l,p)=1$. 也就是 $\forall n=p^\alpha l$，$\alpha\geqslant 2$，方程 $S(n)=Z_1(n)+1$ 无解.

现在考虑当 $p=2,3$，即 $S(n)=1,2,3,4$ 时，有 $n=1,2,3,4,6,8,12,24$. 分别代入 $S(n)$ 和 $Z_1(n)+1$ 中：

当 $n=1$，$S(1)=1$，$Z_1(1)+1=2$；

当 $n=2$，$S(2)=2$，$Z_1(2)+1=4$；

当 $n=3,6$，$S(3)=3$，$Z_1(3)+1=5$，$S(6)=3$，$Z_1(6)+1=5$；

当 $n=4,8,12,24$，$S(4)=4$，$Z_1(4)+1=8$，$S(8)=4$，$Z_1(8)+1=16$，$S(12)=4$，$Z_1(12)+1=9$，$S(24)=4$，$Z_1(24)+1=144$.

综合以上各种情况，定理1得到证明.

参考文献：

[1] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布[J]. 数学学报，2006，49(5)：1 009-1 012.

[2] LU Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna，2006，2(1)：76-79.

[3] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题[J]. 西北大学学报，2008，38(2)：173-176.

[4] 苏丽娟. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计[J]. 纺织高校基础科学学报，2009，22(1)：133-134.

[5] 李玲,姚维利. 一个包含 Smarandache 函数与伪 Smarandache 函数的方程及其正整数解[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2010,33(2):200-202.
[6] 路玉麟. 一个包含 Smarandache 函数的方程[J]. 纺织高校基础科学学报,2008,21(2):253-254.
[7] 李粉菊,杨畅宇. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计[J]. 西北大学学报,2011,41(4):377-379.
[8] 张文鹏. 李海龙. 初等数论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,2007.

An equation involving Smarandache function $S(n)$ and pseudo Smarandache function $Z_1(n)$ and its positive integer solutions

CHE Shun

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710127, China)

Abstract: For any positive integer n, the famous Smarandache function $S(n)$ defined as the smallest positiveinteger m such that $n|m!$ That is, $S(n)=\min\{m: m\in \mathbf{N}, n|m!\}$. *The pseudo Smarandache function* $Z_1(n)$ *defined as the smallest integer* m *such that* $n|m(m+1)(2m+1)/6$ *or* $Z_1(n)=min\{m: m\in\mathbf{N}, n|1^2+2^2+\cdots+m^2\}$, *where* **N** denotes the set of all positive integers. The solvability of the equation $Z_1(n)+1=S(n)$ is studied. Using the elementary method, its all positive solutions is given. At the same time, their exact representation of all solutions are given.

Key words: Smarandache function $S(n)$; pseudo Smarandache function $Z_1(n)$; equation; positive integer solution; elementary method

编辑、校对:黄燕萍

(上接第 14 页)

[5] 黄廷祝. 非奇 H 矩阵的简捷判据[J]. 计算数学,1993,15(3):318-328.
[6] 干泰彬,黄廷祝. 非奇异 H 矩阵的实用充分条件[J]. 计算数学,2004,26(1):109-116.
[7] 李庆春,胡文杰. 广义严格对角占优矩阵的判定准则[J]. 高校应用数学学报,1998,14A(2):229-233.
[8] 刘晶,宋岱才. 非奇 H-矩阵的一个实用判定[J]. 纺织高校基础科学学报,2011,24(4),560-562.

New iterative criteria for nonsingular H-matrices

SHI Ling-ling, XU Zhong, LU Quan

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi′an 710072, China)

Abstract: In this paper, some new iterative critetia are given according to the relations of α-diagonally dominant matrices and nonsingular H-matrices, which extend and improve some related results. Effectiveness of these iterative criteria is illustrated by numerical examples.

Key words: nonsingular H-matrix; α-diagonally dominant matrix; irreducibility; non-zero elements chain

编辑、校对:黄燕萍